C^*-AlgebrasのRegular σ-Completionsについて (作用素環の研究とその応用)

斎藤, 和之

数理解析研究所講究録
356巻 1979年 1-21

C^*-algebras の regular σ-completions について

東北大 理　斎藤和之

C^*-algebra が W^*-algebra として忠実に表現できるための本質的条件は何か？という問題から出発した Rickart-Kaplansky の program は G.K. Pedersen の次の結果により決着がつけられた。

<u>Theorem</u> ([11]) AW^*-algebra が W^*-algebra として忠実に表現できるための必要十分条件はそれが c.a. states を十分沢山もつことである。(*)

AW^*-algebra は W^*-algebra (von Neumann algebra) の理論のその作用する Hilbert space に関係のない部分の抽象化 (W^*-algebra の essense) として Kaplansky により導入された。それは<u>任意の subset の (left or right) annihilator が projection により生成される単項イデアルであるような C^*-algebra</u> であり projections に対する束論, type-classification, 極分解等が成立することが知られている ([3])。それらは S.K. Berberian の本にまとめられた。([3])

Operator algebra の研究者に AW^*-algebra が注目されなかった大きな理由の1つは non W^*, AW^*-algebra の例が研究の対象となる

((*) もちろん Kadison, S. Sakai による別方向の特徴づけがある事もわすれてはならない。)

ほど多くなかったことであろう。1970年，Takenouchi, Dyer 等により non W^*, AW^* factor が構成されたのに刺激され，J. D. M. Wright は，任意に与えられた (separable) C^*-algebra (unital) A の regular-σ-completion をつくりその completion algebra $\hat{A}$ が A が simple の場合 non W^*, type III AW^* factor になることを示した。[16, 17] この事については，数理研講究録 320 p119 を参照されたい。

これはかってに与えられた separable unital C^*-algebra A から簡単な関数解析的方法で，non W^*, AW^* algebra (monotone closed) $\hat{A}$ が構成できるという点で注目すべきであり次に問題になるのは，" A の性質と $\hat{A}$ の性質とがどのように影響しあうか？" ということである。J. D. M. Wright の理論は C^*-algebra に unit を仮定したため構造論を展開する場合必要なイデアル（ほとんど unit をもっていない）の regular σ-completion を考える場合（もちろんその他にも unit のない重要な C^*-algebras が沢山ある）に障害になるので我にはここでまず non unital な C^*-algebra A の " adjunction of a unit C^*-algebra A_1 の regular σ-completion について調べ $\hat{A_1}$ の構造が A の構造とどのように影響しあうか，今後の理論の展開に必要と思われる " Introductory " な部分について展開してみる。他の algebra (特に simple な C^*-algebra) についての議論は今後の研究に待たねばならない。

議論に入る前に unital C^*-algebra の regular σ-completion について

復習しておく。まずDixmierの例（[4]）から始めよう。$C[0,1]$を閉区間$[0,1]$上の複素数値連続関数全体のつくるC^*-algebra（加法，スカラー乗法，積は"pointwise"に入れ normは uniform topology）とし，$\mathcal{B}[0,1]$を$[0,1]$上の有界 Baire 関数全体のつくるC^*-algebra（定義は$C[0,1]$と同じ）とし，$\mathcal{O}$を$\mathcal{B}[0,1]$の元でその台が$[0,1]$の meager subset に入るもの全体のつくる <u>σ-ideal</u> とすると $D[0,1]=\mathcal{B}[0,1]/\mathcal{O}$ は，non W^*，abelian AW^* algebra であった。J.D.M.Wright の理論はこの"non-commutative analogue"を考えることである。Bを<u>unital</u> C^*-algebraとしたとき，Bを非可換関数空間と考える場合その state space X_B上の"continuous affine function"sとして表現することは Kadison によりすでに行われていることでそれを踏襲しよう。その時，"non commutative" Baire affine function"に相当するBの Baire*-envelope $\mathcal{B}_B$は Pedersen（Kadison）[10, 12] に従うことにする。

次に meager な台をもつ Baire functions のつくる σ-ideal に相当する$\mathcal{O}_B$を定義するがこの場合 B_h，B''_h（Bの hermitian part，B''（Bの second dual（[5]）の hermitian part）はそれぞれBの state space X_B（$\sigma(B^*,B)$-compact）上のそれぞれ continuous，bounded な affine functionsと見直しておくことにすれば，$M(B)\overset{\text{def}}{=}\{m\in B''$；$\{x;\ x\in\partial X_B\ ;\ m(x)\neq 0\}$が$\partial X_B$の$\sigma(B^*,B)$-meager subset に入る$\}$（但し$\partial X_B$は$B$の pure states の the spaceで，$\partial X_B\big|\sigma(B^*,B)$は Baire space）と定義することにより$M(B)$は$B''$の$\sigma$-ideal である。$\mathcal{O}_B=M(B)\cap\mathcal{B}_B$

が求める $\mathfrak{B}_B$ の σ-ideal である。∂X_B が Baire space より $\mathcal{O}_B \cap B = \{0\}$

従って、ρ_B を $\mathfrak{B}_B$ onto $\mathfrak{B}_B/\mathcal{O}_B$ の canonical map とすれば、E. Christen

([19])により $\hat{B} = \mathfrak{B}_B/\mathcal{O}_B$ は monotone σ-complete (unital) C^*-algebra

で、ρ_B は σ-homomorphism で、$\rho_B|B$ は injection である。

<u>Theorem</u> ([16, 17]). $(\hat{B}, \rho_B)$ は B の regular σ-completion である。

i.e. 次の(1)(2)を満足する。(**)

(1) $\hat{B}$ は $\rho_B(B)$ を <u>σ-generate</u> する i.e. $\rho_B(B_{sa})$ を含む $\hat{B}_{sa}$ の最小の σ-subspace が $\hat{B}_{sa}$ である,

(2) $\rho_B(B_{sa})$ は $\hat{B}_{sa}$ で <u>order dense</u> である i.e. $\forall x \in \hat{B}_{sa}$ に対して,

$x = \text{l.u.b.}\{\rho_B(a) ; \rho_B(a) \leq x\}$ in $\hat{B}_{sa}$。

彼はさらに $(\hat{B}, \rho_B)$ は B に対して次の意味で unique であることを示した。(C, γ) を (1), (2) を満す別の σ-completion of B とすれば

(*)
$$\begin{tikzcd}
\hat{B} \arrow[rr, "\exists \beta"', "*\text{-isomorphism}"] & & C \\
& B \arrow[ul, "\rho_B"] \arrow[ur, "\gamma"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowright"] &
\end{tikzcd}$$

証明の key point は $\mathfrak{B}_B$ を X_B 上の Baire function と考え Choquet-Bishop-deLeeuw-Alfsen の理論を使うものであった。

$\hat{B}$ の構造を調べる重要な道具となる性質は次の事柄である。

<u>命題</u> ([16]). J を $\hat{B}$ の proper closed two-sided ideal とすれば、$J \cap B$ も B の proper closed two-sided ideal である。

単位元(unit)を有たない C^*-algebra A の場合事情が異なる。i.e.

(**) さらに B が separable なら $\hat{B}$ は σ-finite monotone complete AW*-algebra である。

Aをその state space X_A 上に表現するのではなく Quasi-state space Q_A ($=\{\phi \in A^*;\ \|\phi\| \leqq 1,\ \phi \geqq 0\}$ 但し A^* は A の Banach space dual) 上の continuous affine functions vanishing at 0 として表現するのが適切と思われる (X_A は $\sigma(A^*, A)$-compact ではない)。A の universal Hilbert space H_A 上の identity operator 1_{H_A} は一般に X_A 上 continuous だが Q_A 上 lower semi-continuous (従って Borel) だが continuous ではない。しかし A が separable なら countable increasing approximate identity があるので 1_{H_A} は Q_A 上 Baire function である。今 A と 1_{H_A} とで生成された C^*-algebra を $\hat{A}$ としたとき、$\mathcal{B}_A$ と、$\hat{A}$ を含む $\mathcal{B}(H_A)$ の最小の monotone σ-closed subalgebra A_0^{∞} とは一般に区別しなければならない。Q_A の extreme points 全体 $\partial Q_A = \partial X_A \cup \{0\}$ に注意すると次の事が成立する。

Lemma 1. Aを non-unital な C^*-algebra とすると $\{0\}$ が ∂Q_A の $\sigma(A^*, A)\,|\,\partial Q_A$-topology に関して rare set となり ∂X_A はこの topology に関して Baire space である。

$\mathcal{M}_A = \{m \in A'';\ \{\phi;\ \phi \in \partial X_A;\ m(\phi) \neq 0\}$ が ∂X_A の $\sigma(A^*, A)$-meager set になる$\}$ とし、$\mathcal{J}_A = \mathcal{M}_A \cap \mathcal{B}_A$, $\mathcal{g}_A = \mathcal{M}_A \cap A_0^{\infty}$ とすれば、$\mathcal{J}_A$, $\mathcal{g}_A$ はそれぞれ $\mathcal{J}_A \cap A = \{0\}$, $\mathcal{g}_A \cap \hat{A} = \{0\}$ を満す $\mathcal{B}_A$, A_0^{∞} の σ-ideal である事がわかる。そして、E. Christensen によれば、$A_0^{\infty}/\mathcal{g}_A$ は monotone σ-complete C^*-algebra (unital) でその canonical quotient map $\hat{g}_A$ は σ-homomorphism である。我々の最初の目的は

A に抽象的に 1 を adjoin した C^*-algebra A_1 の J.D.M. Wright の意味の regular σ-completion $(\hat{A}_1, g_{A_1})$ が $(A_0^\infty/g_A, \widetilde{g}_A)$ と同値であることを示すことにある。もちろん $\widetilde{g}_A(\hat{A})$ が A_0^∞/g_A の中で上述の (1), (2) を満すことを示せばよいのだが $\sigma(A^*, A)$-compact でない X_A での Choquet-Bishop-de-Leeuw の理論 (Alfsen : Compact convex sets and boundary integrals, Springer, 1971) の議論が微妙になるので Lemma 1 を使い, $\mathcal{B}_{A_1}/\mathcal{O}_{A_1}$ と A_0^∞/g_A とが上の同値性 (*) を満すような対応を直接構成することにする。

<u>Theorem 1</u> A を <u>non unital</u> C^* algebra とし, $(\hat{A}_1, i)$ を A_1 の regular σ-completion とすれば, 次の diagram が可換になるような $\hat{A}_1$ onto A_0^∞/g_A の $*$-isomorphism $\hat{\phi}$ が存在する。

$$\begin{tikzcd} \hat{A}_1 \arrow[r, "\hat{\phi}"] & A_0^\infty/g_A \\ A_1 \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\phi"] & \hat{A} \arrow[u, "\widetilde{g}_A"'] \end{tikzcd}$$

但しここに ϕ は A_1 onto $\hat{A}$ の canonical $*$-isomorphism とする。

証明の概略は次のようである。A_1 の regular σ-completion は $(\mathcal{B}_{A_1}/\mathcal{O}_{A_1}, g_{A_1})$ としてよい (by (*))。今 H_1 を A_1 の universal Hilbert space π_1 を A_1 の universal representation とすれば, $H_1 = \sum_{\tilde{\varphi}\in X_{A_1}} H_{\tilde{\varphi}}$, $\pi_1 = \sum_{\tilde{\varphi}\in X_{A_1}} \pi_{\tilde{\varphi}}$ 但し $\{\pi_{\tilde{\varphi}}, H_{\tilde{\varphi}}, \eta_{\tilde{\varphi}}\}$ を A_1 の $\tilde{\varphi}\in X_{A_1}$ による GNS-construction とする。X_{A_1} = convex hull of $\{\tilde{\varphi}, \phi_0, \phi\in X_A\}$ 但し $\tilde{\varphi}(a+\lambda 1) = \phi(a)+\lambda$, $\phi_0(a+\lambda 1) = \lambda$ ($\forall a\in A$, λ : complex numbers) に注意して, $\partial X_{A_1} =$

$\{\tilde{\phi}, \phi \in \partial X_A\} \cup \{\phi_0\}$ であるから A の universal Hilbert space H は、H_1 の closed subspace $\tilde{H} = \sum_{\phi \in X_A} H_{\tilde{\phi}}$ と $V\eta_{\tilde{\phi}}(a) = \eta_\phi(a)$ $(\forall a \in A, \forall \phi \in X_A)$ により定義された onto isometry V を仲介として isometrically isomorphic である。$\Phi(x) = V^* P_{\tilde{H}} V$ $(\forall x \in A_1'')$（但し $P_{\tilde{H}}$ は $\tilde{H}$ 上の orthogonal projection）により定義された map Φ は、$\Phi(\pi_1(a+\lambda 1)) = a + \lambda 1_{H_A}$ $\forall a \in A$, λ: complex numbers を満す A_1'' into A'' の σ-weakly continuous $*$-homomorphism であり、この map はさらに $x(\tilde{\phi}) = \Phi(x)(\phi)$ $\forall x \in A_1''$, $\phi \in X_A$ を満す。従ってPedersen の議論から $\Phi(\mathcal{B}_{A_1}) = A_0^\infty$ である。さらにLemma 1 に注意すると $\Phi(\mathcal{J}_{A_1}) = g_A$ 且つ $(\Phi|\mathcal{B}_{A_1})^{-1}(g_A) = \mathcal{J}_{A_1}$ も満している。今 $\hat{\Phi}(a + \mathcal{J}_{A_1}) = \Phi(a) + g_A$ とすればこの map $\hat{\Phi}$ は定理 1 の要求をすべて満すことが確められる。

今後記号を簡単にするために、$(A_0^\infty/g_A, \hat{\imath}_A)$ を $(\hat{A}, i)$ と表わすことにする。もし A が unital ならばこの記号は Wright の記号と一致することは $A_0^\infty = \mathcal{B}_A$, $g_A = \mathcal{J}_A$ より明らかであろう。

さらに一般に A が strictly positive element をもつ（特に A が separable）ならば前に注意したことから $A_0^\infty = \mathcal{B}_A$, $g_A = \mathcal{J}_A$ で、$(\hat{A}_1, i)$ は $(\mathcal{B}_A/g_A, \imath_A)$ と同値である。以下 $\hat{A}$ を A の regular σ-completion algebra と呼ぶことにする。

次の命題は構造論をやる上で重要な道具になる ideal の regular σ-completion を考える上で有効である。

Proposition 1. A を unital な C^*-algebra か又は non unital separable

なC^*-algebraとする。Iを A の<u>separable</u> closed two-sided ideal とし，pを$\mathfrak{B}_A$に於けるIの open supporting central projection とする。その時，Iの regular σ-completion algebra $\hat{I}$は$\hat{A}$の direct summand $\hat{A}z$（但し $z=\gamma_A(p)$（pのγ_Aによる canonical image で，$\hat{A}$の central projection である））と次の意味で $*$-isomorphic である。

$$
\begin{tikzcd}
\hat{I} \arrow[r, "\exists\tilde{\phi}"] & \hat{A}_z \\
\tilde{I} \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\phi"] & C^*(\gamma_A(I), z)\ (\equiv \tilde{\tilde{I}}) \arrow[u, "\iota|\tilde{\tilde{I}}"']
\end{tikzcd}
$$

但し ϕは$\tilde{I}$ onto $\tilde{\tilde{I}}$の canonical $*$-isomorphism で $C^*(\gamma_A(I), z)$は，$\gamma_A(I)$とzとにより generate されたC^*-algebra である。

これを証明するためには $\gamma_A(C^*(I,p)_s)$が$(\hat{A}z)_s$で <u>order dense</u> である事及び $\hat{A}z$が$\gamma_A(C^*(I,p))$を <u>σ-generate</u> することを示せばよいがこれらは次の Lemma 2 からでてくる結果である。

<u>Lemma 2</u>. 上の記号を使うことによって

$$(C^*(A,1_H)p)_s \subset (((C^*(I,p))_s)_\sigma$$

但し $Np=\{xp\ ;\ x\in N\}\ \forall N\subset\mathfrak{B}(H)$，$M_\sigma=\{x;\ x_n\uparrow x$ strongly in $\mathfrak{B}(H)$ for some increasing sequence $\{x_n\}$ in $M_s\}\ \forall M\subset\mathfrak{B}(H)_s$ である。

Proof. $(C^*(A,1_H)p)_s=(A_s)p+\mathbb{R}p$ 但し $\mathbb{R}$は real numbers field とする。$\{u_n\}$をIの countable increasing approximate unit for I とすれば $u_n\uparrow p$ strongly in $\mathfrak{B}(H)$に注意すれば，$\forall a\in A_s$に対して

$$b_n = (\|a\|1_H + a)^{1/2} u_n (\|a\|1_H + a)^{1/2} - \|a\| p$$

$\in C^*(I,p)_h$ 且つ

$$b_n \uparrow (\|a\|1_H + a)^{1/2} p (\|a\|1_H + a)^{1/2} - \|a\| p = ap$$

strongly in $\mathcal{B}(H)$ となり Lemma 2 が従がう。

上の命題を使用することにより, 次の Theorem 2 が成り立つ。

Theorem 2. A を non unital separable C^*-algebra とし, $M(A)$ を A の multiplier algebra とする。その時, $M(A)$ の regular σ-completion algebra $\widehat{M(A)}$ は monotone complete σ-finite AW*-algebra であり $\hat{A}$ onto $\widehat{M(A)}$ の *-isomorphism ψ が次の diagram を可換にする如く存在する。

$$\begin{tikzcd}
\hat{A} \arrow[r, "i"] & \hat{A} \arrow[r, "\psi"] & \widehat{M(A)} \\
\mathfrak{M}(A) \arrow[r, "i"] \arrow[u, "i"] & g_A(M(A)) \arrow[r, "(g_A|_{M(A)})^{-1}", "*\text{-isomorphism}"'] \arrow[u] & M(A) \arrow[u, "g_{M(A)}"'] \\
\tilde{A} \arrow[r, "i"] \arrow[u, "i"] & \tilde{A} \arrow[r, "i"] \arrow[u] & \tilde{A} \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

但しここに $\mathfrak{M}(A)$ は $\{x \in \hat{A} \,;\, xa \in A,\ ax \in A \ \ \forall a \in A\}$ i.e. $\mathfrak{M}(A)$ は A の $\hat{A}$ に於ける idealizer である。

証明の概略は次のようである。一般論より $M(A)$ は $\mathcal{B}(H_A)$ の A と 1_{H_A} とを含む (i.e. $\tilde{A}$ を含む) C^*-algebra となっており, A を次のような意味で essential (に含む ideal) (C^*-algebra) である。 i.e. $M(A)$ の non-zero closed two-sided ideal J で $J \cap A = \{0\}$ となるものはない。今 P

を A の $\mathcal{B}_{M(A)}$（A は separable に注意）に於ける supporting open central projection とすると A が essential である事から $g_{M(A)}(p)=z=1$ が示される。従って上の projection により $\hat{A}$ と $\widehat{M(A)}$ の間に *-isomorphism があって命題の diagram を可換にする。又 Akemann, Pedersen, Tomiyama [1] の理論を借用することにより $g_A(M(A))$ が A の $\hat{A}$ に於ける idealizer である事がわかる。

次に a separable C*-algebra A の regular σ-completion algebra $\hat{A}$ の center の構造を調べてみよう。その為に次のような命題が必要である。

Proposition 2　A を separable C*-algebra とすれば A の Baire*-envelope $\mathcal{B}_A$ は Misonou [9] の意味で weakly central である。

この proposition の証明は F. B. Wright が [15] で AW*-algebra に対して用いた technique の modification である。その "key point" は $\mathcal{B}_A$ が countably generated である事に注意して projections に関する "Comparability theorem", equivalence に関する countable additivity, elements の polar decomposition 等が $\mathcal{B}_A$ の中で成立することであり、これらは Davies, Kehlet の論文に詳しい。

この事と, J. Vesterstrøm [18] の定理を使用することにより次の結果が成り立つ。

Theorem 3　A を separable C*-algebra とし, $\hat{A}$ をその regular σ-completion algebra とすれば $\hat{A}$ の center は $\mathcal{B}_A$ の center C

の $\mathcal{B}_A$ onto $\hat{A}$ の canonical map $g_A\ (\equiv i)$ による canonical image である。

<u>Theorem 4</u> A を Hausdorff primitive ideal space Prim A をもつ separable GCR-C^*-algebra とし, A の ideal center (i.e. M(A) の center) を $Z(M(A))$ で表わすことにすると, $\hat{A}$ の center $\hat{A}^\natural$ ($\cong \widehat{M(A)}$ の center) $\hat{A}^\natural\ (= \widehat{M(A)}^\natural)$ は Prim A 上の bounded complex-valued Baire functions 全体のつくる pointwise definition with uniform norm による algebra modulo meager sets の C^*-algebra (AW^*) $D(\mathrm{Prim}A)$ と $*$-isomorphic である $\widehat{Z(M(A))}$ (ideal center の regular σ-completion) と次の意味で $*$-isomorphic である。

$$\begin{array}{ccccc}
\widehat{M(A)}^\natural & \xrightarrow[*\text{-isomorphism}]{\exists \hat{\phi}} & D(\mathrm{Prim}A) & \xrightarrow[*\text{-isomorphism}]{\exists \psi} & \widehat{Z(M(A))} \\
\uparrow g_{M(A)} & & \uparrow g\ (\text{canonical map}) & & \uparrow i \\
Z(M(A)) & \xrightarrow{\phi} & C_b(\mathrm{Prim}A) & \xrightarrow{\phi^{-1}} & Z(M(A))
\end{array}$$

但し ϕ は $Z(M(A))$ から Prim A 上の bounded continuous functions (complex-valued) 全体のつくる C^*-algebra 上への Dauns-Hofmann の意味の $*$-isomorphism である。

証明の概略は次のとおりである。C を $\mathcal{B}_A$ の center とすると各 $z \in C$ と $\phi \in \partial X_A$ に対して operator $\pi_\phi(z)$ は scalar $f_z(\phi)$ multiple of identity 1_{H_ϕ} である。もし $\phi, \phi' \in \partial X_A$ が $\pi_\phi \sim \pi_{\phi'}$ (unitarily) を満せば $f_z(\phi) = f_z(\phi')$ であるから A が GCR algebra であれば $\exists_1$ Prim A 上の complex-valued function h_z : $h_z(\mu(\phi)) = f_z(\phi)$

$\forall \phi \in \partial X_A$ 但し μ は ∂X_A onto Prim$A$ の $\mu(\phi) = \pi_\phi^{-1}(0)$ による canonical continuous open mapping である。 $z \longmapsto h_z$ なる対応は C から Prim$A$ 上の complex-valued functions の the algebra の中への injection より "$z \longmapsto h_z$" により Prim$A$ 上に topological Borel structure より大きいが Mackey の Borel structure より小さい Borel structure が入る。 A は GCR であり separable であるから 2nd countable locally compact Hausdorff space Prim$A$ 上で上の3つの Borel structures は一致するから "$z \longmapsto h_z$" は C onto $\mathcal{B}$(Prim$A$) (Prim$A$ 上の bounded complex-valued Baire functions のつくる the algebra) の $*$-isomorphism で(記号で Φ で表わす) その $Z(M(A))$ への restriction $\Phi | Z(M(A))$ は $Z(M(A))$ onto C_b(Prim$A$) の Dauns-Hofmann の意味の $*$-isomorphism である。 Prim$A$ の any meager subset N に対して $\mu^{-1}(N)$ が ∂X_A の meager subset である事に注意すれば定理の証明は abelian (classical) case の結果から示すことができる。

さらに次の事に注意しよう。

<u>Proposition 3</u> A を separable C^*-algebra とすると A が <u>Primitive</u> であるための必要十分条件は $\hat{A}$ が factor であることである。

これは Wright の ideal に関する結果及び C^*-algebra に関する Classical result (Dixmier の教科書) から証明できる。

次に GCR-algebras, NGCR-algebras の regular σ-completion algebra について考察しよう。

まず次の例を述べる。A を separable infinite dimensional Hilbert space K 上に act する UHF-algebra とし、$B = A + C(K)$（但し $C(K)$ は K 上の compact operators のつくる C^*-algebra）とすれば、B は separable C^*-algebra で、$B/C(K) \cong A$ である。何故ならば $A \cap C(K) = \{0\}$ だから。従って一般論により $(B(K), i)$ が $C(K)$ の、従って B の regular σ-completion であるから我々は $\hat{B} = B(K)$ を得る。しかし B は not GCR である。何故ならば A が NGCR algebra だからである。しかしながら我々は次の事を示すことができる。

<u>Theorem 5</u>. A を separable C^*-algebra とすれば A が <u>GCR</u> である為の必要十分条件は A の <u>every</u> ideal quotient A/I の regular σ-completion である AW^*-algebra $\widehat{A/I}$ が type 1 であることである。

"If" part は Pedersen の GCR-algebra に関する Baire *-envelope の構造論による。逆に $\hat{A}$ が <u>type 1</u> AW^*-algebra とするとき、I_a を $\hat{A}$ の abelian projections 全体から生成された C^*-algebra とすると I_a は Halpern [7] の結果より $\hat{A}$ の <u>CCR-ideal</u> である。又 $C^*(A, 1_H)_{\sigma} = \hat{A}_{\sigma}$ は $\hat{A}_{\sigma}$ で order dense より <u>$I_a \cap A \neq \{0\}$</u>。この事から A は non-zero CCR-ideal を含む。i.e. 我々は A の every non-zero ideal quotient A が non-zero CCR-ideal をもつことがわかり A は

GCR-algebraである。

<u>Theorem 6</u> Aを<u>separable</u> C*-algebraとするとAがNGCR-C*-algであるための必要十分条件はAW*-algebra $\hat{A}$ がtype 1 direct summandをもたないことである。従って、もしAがseparable NGCRならば $\hat{A}$ は如何なる<u>W*-direct summand</u>をもたないし又如何なるnon-trivial separable representationをもたない。

実際もしAが如何なるtype 1 direct summandをもたないとし、Aがnon-zero GCR ideal Iをもてばtype 1 AW*-algebra $\hat{I}$ はTheorem 2から $\hat{A}$ のdirect summandとなり矛盾する。

もしもAがNGCRで $\hat{A}$ がW*-direct summand $\hat{A}z$ をもてば、$\hat{A}z$ はtype 1である。何故ならば $\hat{A}z$ のpure statesのthe spaceが<u>separable</u>だからである。しかしこの事は上の事実と矛盾する。従ってAがNGCRならば、$\hat{A}$ はW*-direct summandをもたない。

注意(1). Aがseparable C*-algebraとするとAがGCRである為の必要十分条件は $\widehat{A/J}$ がtype 1 W*-factor $\forall J \in \mathrm{Prim}A$ である。"if"の部分を証明するためにはGlimmによるNGCR-algebrasに対する"quasi matrix systems"の構成が必要である。

(2) AがseparableでNGCRならば(1)から $\exists J \in \mathrm{Prim}A$: $\widehat{A/J}$ が<u>non W*</u>, <u>σ-finite</u> <u>monotone complete AW*-factor of type III</u>である。我々はさらに<u>separable</u> primitive NGCR-C*-algebra Aで $\forall J \in \mathrm{Prim}A - \{0\}$ に対して $\widehat{A/J}$ がtype 1 W*-factorであるが $\hat{A}$ 自身

は non W^*-monotone complete σ-finite type III AW^*-factor になるような例をあげることができる。[H. Behnke, F. Krauss, H. Leptin の論文にその例が implicit に述べてある [2]]

(3) すべての simple NGCR C^*-algebra <u>without unit</u> A に対して $\hat{A}$ は non W^*, monotone complete, σ-finite AW^*-factor of type III になることがわかる。実際もし $\hat{A}$ が semi-finite ならば $\hat{A}$ が faithful state をもつ事に注意してそれは type I W^*-algebra となるはずであるがしかしこの事は Theorem 6 から A が NGCR である事に反する。

次に dual C^*-algebra の Regular σ-completion algebra について述べよう。主な定理は次のようである。

<u>Theorem 7</u> A を separable C^*-algebra とすると次の3つの条件は同値である。

(i) A は dual C^*-algebra である,

(ii) $\widehat{M(A)} = M(A)$ $(\cong \hat{A})$,

(iii) $M(A)$ が "C^*-algebra として" AW^*-algebra である。

この定理の証明の為には次の technical lemma が必要である。

<u>Lemma 3</u> A が separable C^*-algebra とするとその multiplier algebra $M(A)$ の pure states の the space $\partial X_{M(A)}$ は $\sigma(M(A)^*, M(A))$-separable である。

次の Lemma は Theorem 7 の 'Commutative version" である (結果、

は classical であると思われるが一応ここで述べておく)。

<u>Lemma 4</u>. X を 2nd countable locally compact Hausdorff space とし, $C \equiv C_0(X)$ を X 上の vanishing at infinity である complex-valued continuous functions 全体のつくる C^*-algebra とする。もしも X の multiplier algebra $M(C)$ (それは X の Stone-Čech の compactification βX 上の $C(\beta X)$ と $*$-同型であるが) が AW^* algebra (i.e. βX が Stonean space) ならば, X は <u>countable</u> <u>discrete space</u> である。

Theorem 7 の証明の概略は次のとおりである。(i) → (ii) → (iii) は比較的容易である。(iii) → (i) を検討しよう。$M(A)$ が AW^*-algebra とすれば $M(A) = M(A)e_1 + M(A)e_2 + M(A)e_3$ ($e_i \in Z(M(A))$ $i=1,2,3$), $M(A)e_1$ は <u>finite type I</u>, $M(A)e_2 = \{0\}$ or type II_1 $M(A)e_3$ は properly infinite の形に分解できる。今 $M(A)e_i \equiv M_i$, $Ae_i = A_i$ ($i=1,2,3$) としよう。$e_2 \neq 0$ とすれば M_2 は type II_1 AW^*-algebra で, non-zero <u>essential</u>, <u>separable</u> two-sided ideal A_2 をもつ。$\mathfrak{M}$ を M_2 のかってな maximal two-sided ideal とすれば $M_2/\mathfrak{M}$ は AW^*-factor of type II_1 である(一般論は Berberian の Baer*-ring の本にでている) $M_2/\mathfrak{M}$ は not separable 且つ simple より $A_2 \subset \mathfrak{M}$. M_2 の "strong semi-simplicity" (F. B. Wright [15]) によれば $A_2 = \{0\}$ しかし A_2 が M_2 で strongly dense であるからこれは矛盾であり $e_2 = 0$ である。さて M_3 の場合, もし $e_3 \neq 0$ ならば, M_3 は <u>properly infinite</u> である。$\{\pi, H_\pi\}$ を M_3 のかってな irreducible representation

とすれば H_π は separable である（∵ $\pi(C^*(A_3, e_3))$ は strongly dense in $\pi(M_3)$）従って、π は properly infinite σ-finite（by Lemma 3）AW*-algebra M_3 から σ-finite W*-algebra $\mathcal{B}(H_\pi)$ の中への *-homomorphism であるから Feldman, Fell の結果によれば（[6]）π は M_3 の projections 上 completely additive である。π はかってであったから M_3 が十分沢山の c.a. states をもつことになり従って M_3 は W*-algebra である（[11]）。Lemma 3 より M_3 は type I atomic W*-algebra である。M_1 に関しては $\frac{\ }{\ }$ の構造論から Lemma 4 により M_1 の center が atomic となる。

従って以上をまとめて $\exists\{H_m\}$: sequence of separable Hilbert spaces : $M(A) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{B}(H_m)$ である。A は separable two-sided ideal of $M(A)$ より 故には $A \subset \sum_{m=1}^{\infty}{}' C(H_m)$（$\{C(H_m)\}$ の restricted direct sum）"as a C*-subalgebra" となり A は dual である。

注意．$M(A)$ が W*-algebra なら A が dual になることは [1] で証明された。

次に C*-algebra の "regular σ-completion closure" が今までの "universal weak closure" とか "weak closure" と大いに異なった点について若干述べて終りとしたい。

(1) C*-algebras（一応 separable は仮定する）A と B との間の surjective homomorphism は $\hat{A}$ onto $\hat{B}$ の surjective homomorphism に extend できるか？　答は一般に "no!" である。

前にも述べたが A を separable な infinite dimensional Hilbert space K 上に act する UHF-algebra とし，$B = A + C(K)$ とする。ϱ を B onto $B/C(K)$ ($\cong A$ via a $*$-isomorphism ϕ) の canonical map とし，$\pi = \phi \circ \varrho$ とすれば，π は B onto A の surjective homomorphism である。その regular σ-completion algebra $\hat{B} = B(K)$ で，$\hat{A}$ は non W^*, type III AW^*-factor である。我々は $\hat{B}$ onto $\hat{A}$ の如何なる $*$-homomorphism ももたないことがわかる。もしもそのような Φ があったとすれば，$\hat{B}$ は σ-finite properly infinite 且つ $\hat{A}$ は σ-finite であるから Feldman and Fell によれば，Φ は completely additive on projections of $\mathcal{B}(K)$ $(= \hat{B})$ で，$\Phi^{-1}(0)$ が closed two-sided ideal of $\mathcal{B}(K)$ に注意すると $\Phi^{-1}(0) = \{0\}$ or $\pi^{-1}(0) = C(K)$ である。もしも $\Phi^{-1}(0) = C(K)$ ならば $\Phi^{-1}(0)$ はすべての finite rank の projections を含み Φ が completely additive であり従って $1_K \in C(K)$ i.e. K が infinite dimensional に矛盾する。もし $\Phi^{-1}(0) = \{0\}$ ならやはり $\mathcal{B}(K)$ と $\hat{A}$ の性質に矛盾する。

(2) A, B any C^*-algebras で $A \subset B$ (as a C^*-subalgebra) とするとき，$\hat{A}$ は $\hat{B}$ の中に C^*-subalgebra として embed する事ができるか？

一般にはやはりできない。上の例を考えてみよう。$\hat{A}$ は σ-finite, non W^*, type III AW^*-factor で，$\hat{B} \cong \mathcal{B}(K)$ with separable Hilbert space K である。もし $\hat{A}$ が $\mathcal{B}(K)$ $(=\hat{B})$ に C^*-subalgebra として

embedできたとすると，$\hat{A}$がnon-trivial separable representationをもつことになる。しかし$\hat{A}$は"very big" i.e. 如何なるnon-trivial separable representationもたないので矛盾する。従って$\hat{A}$は$\hat{B}$にC*-subalgebraとしてはembedできない。

文献表

[1] C. A. Akemann, G. K. Pedersen and J. Tomiyama, Multipliers of C*-algebras, J. Functional Anal., 13(1973), 277-301.

[2] H. Behnke, F. Krauss and H. Leptin, C*-algebren mit geordneten Ideal Folgen, J. Functional Anal., 10(1972), 204-211.

[3] S. K. Berberian, Baer*-rings, Grundl. Math. Wiss., 195(1972), Springer, Berlin.

[4] J. Dixmier, Sur certains espaces considérés par M. H. Stone, Summa Brasil. Math., 11(1951), 151-182.

[5] ——————, Les C*-algebres et leurs representations, Paris Gauthier-Villars, 1964.

[6] J. Feldman and J. M. G. Fell, separable representations of rings of operators, Ann. of Math., 65(1957), 241-249.

[7] H. Halpern, The maximal GCR-ideal in an AW*-algebra, Proc. Amer. Math. Soc., 17(1966), 906-914.

[8] I. Kaplansky, Projections in Banach algebras, Ann. of Math., 53(1951), 235-249.

[9] Y. Misonou, On a weakly central operator algebras, Tôhoku Math. J., 4 (1952), 194–202.

[10] G. K. Pedersen, On weak and monotone closures of C^*-algebras, Comm. Math. Phys., 11 (1969), 221–226.

[11] ______________, Operator algebras with weakly closed abelian subalgebras, Bull. London Math. Soc., 4 (1972), 171–175.

[12] ______________, Applications of weak*-semi-continuity in C^*-algebra theory, Duke Math. J., 39 (1972), 431–450.

[13] K. Saitô, A non-commutative theory of integration for a semi-finite AW^*-algebra and a problem of Feldman, Tôhoku Math. J., 22 (1970), 420–461.

[14] ______________, AW^* algebras with monotone convergence property and examples by Takenouchi and Dyer, Tôhoku Math. J., 31 (1979), 31–40.

[15] F. B. Wright, A Reduction for algebras of finite type, Ann. of Math., 60 (1954), 560–570.

[16] J. D. M. Wright, Regular σ-completions of C^*-algebras, J. London Math. Soc., 12 (1976), 299–309.

[17] ______________, Wild AW^*-factors and Kaplansky-Richart algebras, J. London Math. Soc., 13 (1976), 83–89.

[18] J. Vesterstrøm, On the homomorphic image of the center

of a C*-algebra, Math. Scand., 29 (1971), 134-136.

[19] E. Christensen, Non-commutative integration for monotone sequentially closed C*-algebras, Math. Scand., 31 (1972), 171-190.

[20] E. T. Kehlet, On the monotone sequential closure of a C*-algebra, Math. Scand., 25 (1969), 59-70.

以上